

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. Ломоносова**

---

**Физический факультет  
кафедра общей физики и физики конденсированного состояния**

**Методическая разработка  
по общему физическому практикуму**

**ТЕПЛОЕМКОСТЬ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ**  
(теоретическое введение к задачам 40, 44)

**Ст. преп. А. Е. Богданов, доц. Г. Е. Пустовалов**

**Москва 2012**

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

# ТЕПЛОЕМКОСТЬ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

## ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Первое начало термодинамики утверждает, что бесконечно малое количество теплоты  $\delta Q$ , сообщённое системе (телу), идет на изменение внутренней энергии системы  $dU$  и совершение системой работы над внешними телами  $\delta A$ :

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (1)$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии для термодинамических систем. Величина  $\delta Q$ , стоящая в левой части (1), представляет собой энергию, которая переходит от одного тела к другому при теплообмене.  $\delta Q$  считается положительной, если она сообщается телу, и отрицательной, если забирается от него. Бесконечно малое изменение внутренней энергии  $dU$  связано с изменением кинетической и потенциальной энергии молекул. Эта величина является полным дифференциалом, т.к. она определяется только начальным и конечным состояниями системы. Элементарная работа  $\delta A$  и количество теплоты  $\delta Q$  зависят от вида процесса, при котором система переходит из начального состояния в конечное. Они не являются полными дифференциалами, поэтому для их обозначения используется знак  $\delta$ .

Пусть работа  $\delta A$  совершается силами давления газа, находящегося под поршнем. Если давление газа равно  $p$ , то при перемещении поршня площадью  $S$  на бесконечно малую величину  $dx$  газ совершит работу

$$\delta A = Fdx = pSdx = pdV,$$

где  $F$  - сила давления газа на поршень,  $Sdx = dV$  - приращение объёма газа. Подставив это выражение для работы в (1), получим:

$$\delta Q = dU + pdV. \quad (1^*)$$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОЁМКОСТИ

Пусть при сообщении системе количества теплоты  $\delta Q$  её температура изменилась на величину  $dT$ . *Теплоемкостью* системы  $C$  называется величина, определяемая формулой

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (2)$$

С учётом (1\*) формулу (2) можно записать в виде:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + p \frac{dV}{dT}. \quad (3)$$

Теплоёмкость характеризует способность системы изменять свою температуру при сообщении ей некоторого количества теплоты. Она зависит от рода вещества, его агрегатного состояния, термодинамических параметров и вида процесса теплообмена. При расчётах удобно пользоваться *удельной теплоёмкостью*  $c$  и *молярной теплоёмкостью*  $C$ . Удельной теплоёмкостью  $c$  называется отношение теплоёмкости системы к её массе. Эта величина численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить  $1 \text{ кг}$  вещества для изменения его температуры на  $1 \text{ K}$ . Единицей измерения удельной теплоёмкости является  $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}$ . Аналогично вводится понятие молярной теплоёмкости  $C$ , или теплоёмкости одного моля вещества, которое будет использоваться в дальнейшем. Молярная теплоёмкость  $C$  измеряется в  $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}$ . Между удельной и молярной теплоёмкостями существует простая связь:  $c = C/M$ , где  $M$  - молярная масса вещества. Эти величины используются, если система однородна по своему составу. В этом случае они являются характеристиками вещества системы.

В зависимости от вида процесса, происходящего с системой, различают два вида теплоёмкости: теплоёмкость при постоянном объёме  $C_V$  и теплоёмкость при постоянном давлении  $C_p$ . Эти величины заметно отличаются друг от друга для газов, а в случае твёрдых и жидких тел значения  $C_p$  и  $C_V$  близки друг к другу.

Основная трудность экспериментального определения теплоёмкостей жидкостей и газов состоит в необходимости учёта количества теплоты, идущего на нагревание сосуда, в котором находится исследуемая жидкость или газ.

## ТЕПЛОЁМКОСТЬ $C_p$ И $C_V$ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Свойства многих газов в достаточно широком интервале давлений и температур хорошо описываются при помощи модели идеального газа. В её основе лежит представление о газе как о совокупности находящихся в тепловом движении молекул, которые упруго сталкиваются между собой, но не взаимодействуют на расстоянии. Внутренняя энергия идеального газа представляет собой суммарную кинетическую энергию всех его молекул и определяется только температурой газа:  $U = U(T)$ . Для

идеального газа легко получить соотношение между  $C_p$  и  $C_V$ . Если объём газа постоянен, т.е.  $V=const$ , то  $dV=0$ , и из (3) получаем выражение для теплоёмкости  $C_V$  идеального газа:

$$C_V = \frac{dU}{dT}. \quad (4)$$

Тогда для теплоёмкости при постоянном давлении  $C_p$  соотношение (3) запишется в виде:

$$C_p = C_V + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (5)$$

Индекс  $p$  при скобках в правой части указывает на то, что дифференцирование производится при постоянном давлении, поэтому здесь взята частная производная  $\partial V / \partial T$ . Её значение можно определить из уравнения состояния:

$$pV = RT, \quad (6)$$

справедливого для одного моля идеального газа. Возьмём дифференциалы от обеих частей этого уравнения:

$$\begin{aligned} d(pV) &= RdT, \\ Vdp + pdV &= RdT. \end{aligned}$$

Если  $p=const$ , то  $dp=0$ , и в этом случае:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p}. \quad (7)$$

В результате из (5) получим, что молярная теплоёмкость идеального газа  $C_p$  больше его молярной теплоёмкости  $C_V$  на величину универсальной газовой постоянной  $R$ :

$$C_p - C_V = R. \quad (8)$$

Это соотношение называется *уравнением Майера*. Отношение теплоёмкостей при постоянном давлении и постоянном объеме  $\gamma = C_p / C_V$  всегда больше единицы, т.к.  $C_p > C_V$ . Это можно пояснить следующим образом. При изохорическом процессе, когда объём системы не меняется

( $dV=0$ ), в соответствии с первым началом термодинамики (1\*) вся сообщённая газу теплота идет на изменение его внутренней энергии. При изобарическом процессе часть теплоты идет на совершение газом работы  $p dV$ . Для одного моля идеального газа при нагревании его на  $1\text{ K}$  при  $p = \text{const}$  эта работа, как нетрудно видеть из (7), равна универсальной газовой постоянной  $R$ . Поэтому для изменения температуры газа на  $1\text{ K}$  при постоянном давлении требуется затратить большее количество теплоты, чем при постоянном объеме, т.е.  $C_p > C_V$ .

Согласно устанавливаемому статистической физикой положению о равномерном распределении энергии по степеням свободы, средняя энергия молекулы газа равна:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где  $i$  - число степеней свободы молекулы,  $k$  - постоянная Больцмана. Умножив её на число Авогадро  $N_A$ , получим внутреннюю энергию одного моля идеального газа:

$$U = N_A \langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} N_A kT = \frac{i}{2} RT.$$

Используя последнюю формулу можно выразить теплоемкости  $C_p$  и  $C_V$  через число степеней свободы молекулы газа  $i$ :

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R, \\ C_p &= C_V + R = \frac{i+2}{2} R, \\ \gamma &= \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, для идеального газа теплоёмкости  $C_p$  и  $C_V$  постоянны и определяются числом  $i$ . Оно равно сумме числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{колеб}}.$$

Для многих двухатомных газов, в т.ч. для воздуха, можно принять  $i=5$  (3

поступательные степени свободы и 2 вращательные). В этом случае отношение теплоемкостей  $\gamma = 1.4$ .

## ПОЛИТРОПИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

В общем случае процесс, при котором теплоёмкость системы  $C$  остается постоянной, называется *политропическим*. Выведем его уравнение для идеального газа. С учётом определения теплоемкости (2) и соотношения (4), первое начало термодинамики (1\*) можно записать в виде:

$$CdT = C_V dT + pdV. \quad (10)$$

Выразим давление газа  $p$  из уравнения состояния (6):

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{C_p - C_V}{V} T,$$

где учтено, что  $R = C_p - C_V$ . Разделяя переменные в (10), получим:

$$\frac{dT}{T} + \frac{C_p - C_V}{C_V - C} \frac{dV}{V} = 0.$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} + \frac{C_p - C_V}{C_V - C} \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = 0,$$

$$\ln \frac{T}{T_0} + \left( \frac{C_p - C_V}{C_V - C} \right) \ln \frac{V}{V_0} = const.$$

Используя свойства логарифмов, в результате для политропического процесса получаем:

$$TV^{n-1} = const, \quad (11)$$

где введено обозначение:  $\frac{C_p - C_V}{C_V - C} = n - 1$ .

Если в уравнении состояния (6) выразить температуру газа через его давление и объём ( $T = pV/R$ ) и подставить в (11), получим уравнение *политропы*:

$$pV^n = const, \quad (12)$$

где  $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$  является *показателем политропы*.

Рассмотрим некоторые частные случаи этого уравнения.

1.  $n=0$ ,  $p=const$ , изобарический процесс. В этом случае  $C = C_p$ , т.е. теплоёмкость есть теплоёмкость при постоянном давлении.
2.  $n=\pm\infty$ ,  $V=const$ , изохорический процесс,  $C = C_V$
3.  $n=1$ ,  $pV=const$ , изотермический процесс. В этом случае  $dT=0$ , т.к.  $T=const$ , и из определения теплоёмкости (2) следует, что  $C=\infty$ .
4.  $n=\gamma$ , адиабатический процесс,  $C=0$ . В этом случае система не обменивается теплотой с окружающими телами, т.е.  $\delta Q=0$ . Для адиабатического процесса справедливо уравнение:

$$pV^\gamma = const. \quad (13)$$

Таким образом, теплоёмкость системы во многом определяется характером процесса и может принимать любые значения.

Все рассуждения, проведённые выше, относятся к классической теории теплоёмкости. Согласно её результатам,  $C_p$  и  $C_V$  не зависят от температуры и являются постоянными величинами. Они определяются числом степеней свободы молекулы газа  $i$  (9). Результаты классической теории согласуются с экспериментальными значениями  $C_p$  и  $C_V$  лишь в определённом температурном интервале. Они справедливы, в частности, для воздуха при температурах, лежащих вблизи комнатной. Вне этого интервала, при достаточно низких или высоких температурах, теплоёмкость уже не является постоянной величиной. Её температурная зависимость находит свое отражение в квантовой теории.